# 編入テスト (06/25)

名前：

各大問 10 点 (大問 8 のみ 30 点)，120 分

## 1

次の各問に答えよ．

- 自然数 $m, n$ に対して，$A = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 - (m^2 + n^2)^2$ を計算せよ．
- $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす自然数の組 $(a, b, c)$ を 10 種類を求めよ．ただし，$a : b : c = a' : b' : c'$ となる自然数の組 $(a, b, c), (a', b', c')$ は相似と見なし，10 種類はお互いが相似な組でないものとする．

## 2

次の各問に答えよ．

- 1 次不定式 $5x + 7y = 1$ を満たす整数の組 $(x, y)$ を 2 種類求めよ．
- 1 次不定式 $11x + 7y = 1$ を満たす整数の組 $(x, y)$ を 2 種類求めよ．
- 1 次不定式 $5x + 12y = 1$ を満たす整数の組 $(x, y)$ を 2 種類求めよ．

## 3

次の連分数の値を求めよ．

$$A = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}, \tag{1}$$

## 4

三角形 $ABC$ の辺の長さが $AB = 13, BC = 5, CA = 12$ である三角形に内接する円の最大半径を求めよ．また 1 辺の長さが 6 の正三角形に内接する円の最大半径を求めよ．

## 5

直方体 $ABCD - EFGH$ があり，面 $ABCD$ と面 $EFGH$ は 1 辺の長さが 6 の正方形とし，直方体の高さは 5 とする．このとき，頂点 $A$ と，頂点 $A$ にもっとも離れた頂点 $G$ に紐をくくり，直方体の表面を這わせた．紐が最も小さくなるとき，その紐の長さを求めよ．

## 6

円周上に 4 点が $A, B, C, D$ の順に配置しており，線分 $AC$ と線分 $BD$ の交点を $P$ とする．このとき，線分 $AP, BP, CP, DP$ の長さに対して $AP \times CP = BP \times DP$ が成り立つことを示せ．

## 7

$xy$ 平面に直線 $l_1 : y = x$ と直線 $l_2 : y = \frac{x}{2} + 1$ が与えられている．直線 $l_1$ と直線 $l_2$ の交点の座標を求めよ．さらに以下のルールで点を作る．それぞれの点の座標を求めよ．

**(0)** 原点 $O$ を通り，$y$ 軸と平行な直線と直線 $l_2$ の交点を $C_1$ とし，$C_1$ を通り，$x$ 軸と平行な直線と直線 $l_1$ の交点を $A_1$ とする．

**(1)** $A_1$ を通り，$y$ 軸と平行な直線と直線 $l_2$ の交点を $C_2$ とし，$C_2$ を通り，$x$ 軸と平行な直線と直線 $l_1$ の交点を $A_2$ とする．

**(2)** $A_2$ を通り，$y$ 軸と平行な直線と直線 $l_2$ の交点を $C_3$ とし，$C_3$ を通り，$x$ 軸と平行な直線と直線 $l_1$ の交点を $A_3$ とする．

$A_1, A_2, A_3$ の座標をそれぞれ求めよ．

## 8

$x_1 = 1$ として，数列 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \cdots$ に対して隣り合う $x_n, x_{n+1}$ が次の関係式を満たす．

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 1, \qquad (n \geq 1) \tag{2}$$

たとえば，式 (2) の $n = 1$ として，$x_2 = x_{1+1} = \frac{x_1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ となる．このとき，次の各問に答えよ．

- $x_3, x_4, x_5, x_6$ をそれぞれ求めよ．
- $x_n > 0$ のとき，$x_{n+1} > 0$ となることを示せ．
- $x_n < 2$ のとき，$x_{n+1} < 2$ となることを示せ．
- $0 < x_n < 2$ のとき，$x_{n+1} > x_n$ となることを示せ．
- $0 < x_n < 2$ のとき，$\Delta_n = x_{n+1} - x_n$ と $\Delta_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1}$ に対して，$\Delta_{n+1} < \Delta_n$ が成り立つことを示せ．ただし，式 (2) より，$\Delta_n = x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{2} + 1 - x_n = 1 - \frac{x_n}{2}$ であることを用いてよい．
- 以上の議論より，式 (2) で数列を作っていくと，$x_n$ と $x_{n+1}$ はだんだん近づき，ある値 $a$ に収束する．つまり $x_n = x_{n+1} = a$ となる．この収束値 $a$ を求めよ．