

編入テスト (06/23)

名前：_____

各大問 10 点, 120 分

1

点 A の座標 $(0, 1)$ と点 B の座標 $(12, 4)$ が xy 平面上に与えられている. 点 P が x 軸上にあり, 線分 AP と線分 BP の長さの和 $AP + BP$ が最小になる点 P の座標を求めよ. また $AP + BP$ の最小値を求めよ.

2

次の各問に答えよ.

- $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$ を有理化せよ.
- 次の値を求めよ.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}}, \quad (1)$$

- 次の値を求めよ.

$$B = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} \cdots \\ + \frac{1}{\sqrt{78} + \sqrt{77}} + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{78}} + \frac{1}{\sqrt{80} + \sqrt{79}} + \frac{1}{\sqrt{81} + \sqrt{80}}, \quad (2)$$

3

次を計算しなさい.

- $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$
- $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$
- $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2} + \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}$

4

平行四辺形 $ABCD$ の辺 AD, BC の中点をそれぞれ E, F とする. 線分 AC, DF の交点を G とし, $GH \parallel AD$ となるように辺 DC 上に点 H をとる. このとき, 四角形 $EGFH$ の面積は, 平行四辺形 $ABCD$ の面積の何倍か答えよ.

5

$\triangle ABC$ の辺 AC の中点を M , 辺 BC を $2:3$ に内分する点を D , AD と BM の交点を E とする. このとき, 次の比を求めなさい.

- $BE:EM$
- $\triangle AEM:\triangle ABC$

6

$\triangle ABC$ の辺 BC を $1:2$ に内分する点を D , 辺 CA を $1:2$ に内分する点を E , 辺 AB を $1:2$ に内分する点を F とし, BE と CF の交点を P , CF と AD の交点を Q , AD と BE の交点を R とする. このとき, $\triangle PQR$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の何倍であるか答えなさい.

7

辺の長さが $AB = CD = x, AD = BC = y, (x < y)$ となる長方形 $ABCD$ のビリヤード台がある. 頂点 A から $\angle BAP = 45^\circ$ となる辺 BC 上の点 P に大きさ 0 のビリヤード玉を照射し, 各壁に跳ね返ることを考える. ただしビリヤード玉と壁や床の摩擦係数は 0 とする. 次の各問に答えよ.

- $x = 2, y = 3$ とし, ビリヤード玉が何回か壁にぶつかった後, ある頂点に達した. その頂点と何回壁にぶつかったか答えよ.
- $x = 4, y = 5$ とし, ビリヤード玉が何回か壁にぶつかった後, ある頂点に達した. その頂点と何回壁にぶつかったか答えよ.
- $x = 11, y = 13$ とし, ビリヤード玉が何回か壁にぶつかった後, ある頂点に達した. その頂点と何回壁にぶつかったか答えよ.

8

n を正の整数として, $(1+\sqrt{n})^2$ の整数部分を a_n とする. たとえば, $n = 2$ のとき, $(1+\sqrt{2})^2 = 5.8\dots$ であるから, $a_2 = 5$ である.

- $a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ をそれぞれ求めよ.
- $2^2 \leq n < 3^2$ であるとき, $a_{n+1} - a_n = 2$ となる n を全て求めよ.
- $3^2 \leq n < 4^2$ であるとき, $a_{n+1} - a_n = 2$ となる n を全て求めよ.

9

正の整数 n において $\sqrt{n^2 + 104}$ が整数になる n を全て求めよ.

10

次の各問に答えよ.

- 2^{18} を 19 で割った余りを求めよ.
- 3^{18} を 19 で割った余りを求めよ.
- $18!$ を 19 で割った余りを求めよ.

ただし余りは 0 以上 18 以下とする. また $18! = 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times \cdots 4 \times 3 \times 2 \times 1$ で 18 の階乗を表す.